

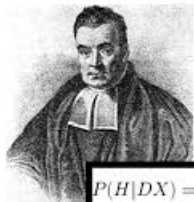
A lényeg

**La Théorie des probabilités n'est que le bon sens
reduit au calcul.**

—*Pierre Simon, Marques de Laplace*

Fontos észrevenni, hogy az objektivitás követelménye a fizikában nem más, hogy a kísérleti fizikusok azonos tudás birtokában azonos következtetéseket vonjanak le a különböző kísérletek eredményeiből.

A történetben résztvevők



$$P(H|DX) = \frac{P(H|X) \times P(D|HX)}{P(D|X)}$$



- James Bernouilli (1713Ö)
- Reverend Thomas Bayes (1763 posthumusz)
- Laplace Pierre Simon Laplace (1912)
- Thompson Jaynes (2003) Probability theory The Logic of Science

A mérések szerepe a fizikában

Elméleti fizika

Tesztelhető elméletek megalkotása.

Az mérési adatok feldolgozásából kapott eredmények birtokában az elméletek módosítása.

Kísérleti fizika

Kísérletek elvégzése és a mérési eredményekből ...

- fizikai paraméterek meghatározása
paraméterbecslés
- következtetés az elméleti modellek helyességéről
modellválasztás

A két terület nem különül el egymástól.

Következtetés

A rendelkezésre álló igaz kijelentésekből más eseményekről fogalmazunk meg állításokat.

- A rendelkezésre álló információ elég ahhoz, hogy biztos kijelentéseket tegyünk akkor deduktív logikát alkalmazunk.
- A rendelkezésre álló információ nem elég ahhoz, hogy biztos kijelentéseket tegyünk akkor induktív logikát alkalmazunk. A következtetések bizonytalanok.

Tudásunk mindig hiányos, a mérések pontatlanok.

induktív következtetés kell használnunk

Hiányos ismeretekből \rightarrow nem egyértelműek a következtetések.

statisztikus vagy valószínűségi következtetés

Valószínűségi következtetés

A valószínűségi következtetést használjuk a mindennapi életben (is)
Mekkora az esélye, hogy ...

- holnap sütni fog a nap
(Kék az ég. Tegnap sütött.) – rendelkezésre álló információk
/Lemenjek a strandra?/ – döntéshozatal
- a vonat 5 percnél kevesebbet fog késni
(Ma pontosan érkezett. Tegnap késett.)
/Melyik vonatra vegyek jegyet?/
- a plazma hőmérséklete 10keV és 12keV között van
(TS mérés 13keV +/- 4keV)
- { Elmélet-1: – 50MW ... → H-mode
Elmélet-2: – 40MW ... → L-mode }
(Mérés– 45MW ... H-mode ...)
Melyik elmélet valószínűbb?

Deduktív következtetés

- Egy elmélet kísérletileg ellenőrizhető jóslatait alkotjuk meg.
- Elég információ áll rendelkezésre, hogy biztos kijelentést tegyünk.
- Az elméletet igaznak tételezzük fel,
pontosan ismerjük a mérési eljárást, ...
ismerjük a statisztikus és szisztematikus hibákat.
- A plazma különböző fizikai paraméterei esetén
→ milyen mérési adatokat várunk.
- Az okokból az okozatokat határozzuk meg.

Induktív következtetés

- A kísérletek eredményeiből az elméletek igaz voltára, vagy fizikai paramétereinek értékere következtetünk.
- Nem áll rendelkezésünkre elég információ, hogy biztos kijelentéseket tegyünk.
Nem tudjuk pontosan meghatározni a paraméterek értékét.
Nem tudjuk egyértelműen eldönteni melyik elmélet igaz.
- Az okozatokból következtetünk a lehetséges okokra.
- Csak valószínűségi következtetés tehetünk.

Deduktív, induktív következtetés

Deduktív

- A rózsza piros.
- Ez a virág rózsza.
- ◇ Ez a virág piros.

Elég információ áll rendelkezésre.
Biztos kijelentést tehetünk.

Induktív

- A rózsza piros.
- Ez a virág piros.
- ◇ Ez a virág lehet hogy rózsza.

Nem áll elég információ
rendelkezésre.
Valószínűségi következtetés
tehetünk.
Ez a virág valószínűbb hogy rózsza.

Meg tudjuk határozni, hogy mennyivel valószínűbb, hogy rózsza?

Jelölések

$A, B, H \dots$ állítás, elmélet, esemény, ...

\overline{A} – logikai negáció

$A + B$ – logikai VAGY

AB vagy (A, B) – logikai ÉS

(B lehet igaz vagy hamis)

$A|B$ feltételes állítás – A ha B fennáll

(B mindig igaz)

Összetett állítások

$C = \overline{A + B}$ $D = (A + B)(A - C) \dots$

$C = A \Rightarrow B$

A logikai ÉS és a negáció alkalmazásával bármely összetett állítás felírható.

Implikáció

$A \Rightarrow B$ – ha A akkor B

A – ok B – okozat

ekvivalens azzal az egyenlettel, hogy $A = A, B$

ekvivalens azzal az összetett állítással, hogy $\overline{A} + B$

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

A	B	$A \Rightarrow B$	A, B
I	I	I	I
I	H	H	H
H	I	I	H
H	H	I	H

Deduktív következtetés

$A \Rightarrow B$

Megfigyeljük A -t és ez igaz $\rightarrow B$ igaz

$A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Megfigyeljük B -t és ez hamis $\rightarrow A$ hamis

Induktív következtetés

- Legyen $A \Rightarrow B$ és figyeljük B -t.
Mit tudunk következtetni A -ról?
- Ha B hamis akkor A is hamis.
 $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
- Ha B igaz akkor A nem biztos, hogy igaz,
(nem igaz, hogy $B \Rightarrow A$)
de A valószínűbb hogy igaz.
- Ha A hamis akkor B nem biztos, hogy hamis,
de B kevésbé valószínűbb hogy igaz.

A	B	$A \Rightarrow B$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Valószínűség a Bayes elméletben

A Bayes elméletben a valószínűség azt fejezi ki, hogy mennyire hiszünk egy esemény igaz voltában az eseménnyel kapcsolatos információk birtokában.

Jelöljük $p(A|I)$ -vel az A esemény hihetőségét az I információk birtokában. Valószínűség minden eseményhez, állításhoz hozzárendelhető.

Mindig feltételes.

A Bayes valószínűség elmélet úgy tekinthető mint a logika (Boole algebra) kiterjesztése olyan esetekre amikben nem csak igaz vagy hamis értékek szerepelnek.

Cox axiómák

(Nem axiómák inkább elvárások.)

- Legyen tranzitív \rightarrow hihetőség valós szám $p(A|I)$
- $p(A|I) = 1$, ha az A esemény igaz $p(A|I) = 0$, ha az A esemény hamis
- Ha $p(A|I)$ adott $\rightarrow p(\bar{A}|I)$ is adott
- Ha $p(A|B, I)$ adott és $p(B|I)$ is adott $\rightarrow p(AB|I)$ is adott
- A levonható következtetés $p(A|I)$ -ről csak I -től függhet nem a logikai lépésektől ahogy meghatározzuk $p(A|I)$ -t.

I a rendelkezésre álló releváns információk.

\rightarrow az esemény hihetőségéhez rendelt szám a valószínűségelmélet szabályait követi.

$p(A|I)$ a Bayes értelemben vett valószínűség.

Mi a valószínűség?

- Klasszikus
 - ▶ $p(A|I)$ az A esemény relatív gyakorisága a végtelen sok I eseményben
 - ▶ A valószínűségi változó – $p(A|I)$ az A tulajdonsága
- Bayes
 - ▶ $p(A|I)$ az A esemény hihetősége, hogy A igaz, ha az I információk állnak rendelkezésre
 - ▶ A tetszőleges állítás – $p(A|I)$ ismeretünk A -ról

Valószínűségi kalkulus

A valószínűségi számítások a következő két szabályon alapulnak. Ezek vezethetők le a Cox axiómákból.

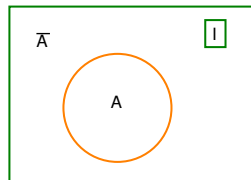
- összeg szabály

$$p(A|I) + p(\bar{A}|I) = 1$$

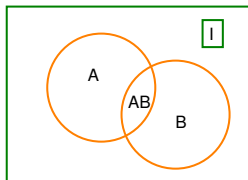
- szorzat szabály

$$p(A, B|I) = p(A|B, I)p(B|I) = p(B|A, I)p(A|I)$$

A



A



Valószínűségi kalkulus – Venn diagram – normált terület

$$p(A) = A_t/I_t \quad p(\bar{A}) = \bar{A}_t/I_t \quad p(AB) = AB_t/I_t \quad p(A|B) = AB_t/B_t$$

Valószínűségi kalkulus

Az összeg és a szorzatszabályból levezethetőek a következő állítások.

Kiterjesztett összeg szabály

$$p(A + B|I) = p(A|I) + p(B|I) - P(A, B|I)$$

Ha A és B egymást kizáró, azaz $AB = 0 \rightarrow$

$$p(A + B|I) = p(A|I) + p(B|I)$$

Ha A és B független, azaz $p(A|B, I) = p(A|I) \rightarrow$

$$p(A, B|I) = p(A|I)p(B|I)$$

Bayes-tétel

$$p(A|B, I) = \frac{p(B|A, I)p(A|I)}{p(B|I)}$$

Valószínűségi kalkulus

A H állítást bontsuk fel teljes, egymást kölcsönösen kizáró $\{H_i\}$ eseményrendszerre.

A $\{H_i\}$ események közül egy és csak egy igaz. $\rightarrow H$ igaz

$$H = \sum_i H_i \quad H_i, H_j = \delta_{ij}$$

$$\sum_i p(H_i|I) = p\left(\sum_i H_i|I\right) = p(H|I) = 1$$

Marginalizáció

$$\sum_i p(A, H_i|I) = p\left(A \sum_i (H_i)\right) = p(A, H|I) = p(A|I)$$

Kezelhetőek az u.n. érdektelen paraméterek.

Felbontás

$$P(A|I) = \sum_i p(A|H_i, I)P(H_i|I)$$

Összetett esemény valószínűsége egyszerűbb események valószínűségéből határozható meg.

Bayes elmélet: a megismerés leírása

A H esemény legyen egy fizikai elmélet, paraméter, ...

A D esemény legyen a mérési adat

$$p(H|D, I) = \frac{p(D|H, I)p(H|I)}{p(D|I)}$$

$p(H|I)$ a prior – tudásunk az adatok kiértékelése előtt.

$p(D|H, I)$ a likelihood – mérési adatok valószínűsége, ha az elmélet igaz.

$p(H|D, I)$ a poszterior – tudásunk az elmületről a mért adat figyelembevételével.

$p(D|I)$ teljes valószínűség – normalizációs állandó.

$p(H|I)$ – szubjektív valószínűség

Racionálisan gondolkodó egyének azonos információk birtokában azonos valószínűségeket rendelnek az eseményekhez.

Valószínűségeloszlás

Alkalmazzuk a Bayes tételt egy teljes egymást kölcsönösen kizáró teljes $\{H_i\}$ eseményrendszerre.

$$p(H_i|D, I) = \frac{p(D|H_i, I)p(H_i|I)}{p(D|I)}$$

$$\sum p(H_i|D, I) = 1$$

$$P(D|I) = \sum_i p(D|H_i, I)p(H_i|I)$$

A nevező normálási állandó.

A $\{H_i\}$ eseményrendszer poszterior valószínűségeloszlását kapjuk.

Ebben az értelemben a likelihood a hipotézisek függvénye adott adatok esetén.

Folytonos eseménytér

Legyen az A esemény, hogy az a folytonos paraméter az $[b, c]$ intervallumba esik.

Az A esemény valószínűsége

$$p(A|I) = \int_b^c pdf(a|I) da, \text{ ahol}$$

$$pdf(a|I) = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{p(a \leq x < a + \delta a | I)}{\delta a}$$

$pdf()$ a valószínűségi sűrűségfüggvény.

Definiálható teljes EKK eseményrendszert

$$A_1 = a \in [a_1, a_2]$$

$$A_2 = a \in [a_2, a_3]$$

.

$$A_N = a \in [a_{N-1}, a_N]$$

Tartson bármely intervallum hossza nullához.

A valószínűségi kalkulus használatával a fenti kifejezések beláthatóak.

Folytonos eseménytér

Szorzat szabály

$$pdf(a, b|I) = pdf(a|b, I)pdf(b|I)$$

Normált

$$\int pdf(a|I)da = 1$$

Marginalizáció

$$pdf(a|I) = \int pdf(a, b|I)db$$

Bayes tétel

$$pdf(a|D, I) = \frac{pdf(D|a, I)pdf(a|I)}{\int pdf(D|a, I)pdf(a|I)da}$$

Folytonos eseménytér

Diszkrét eseménytér – Folytonos eseménytér

Összegzés – Integrálás

A továbbiakban nem teszünk különbséget jelölésben p és pdf között, változója egyértelműen meghatározza, hogy melyiket kell használni.

A valószínűségi kalkulus valószínűségekre alkalmazható nem a valószínűségi sűrűségfüggvényre.

Valószínűséget úgy kapunk, ha a $p(x|I)$ sűrűségfüggvényt szorozzuk dx -szel.

A valószínűség dimenziótlan, így a sűrűségfüggvény dimenziója a változó dimenziójának a reciproka.

Integrálni csak a csak a feltételt jelző vonaltól balra lévő változóra lehet. (Lásd a sűrűségfüggvény definíciója.)

A likelihood nem sűrűségfüggvény, így nem is normált.

Példa

A Bayes módszer alkalmazása.

AIDS teszt

Kovács AIDS tesztet csináltat és a teszt eredménye +.

Legyen a teszt hatékonysága 98%

Mi a valószínűsége, hogy Kovács AIDS-es?

Nyilvánvaló, hogy nem 98%.

A probléma fenti megfogalmazása nem egyértelmű.

Példa I

A probléma pontos megfogalmazásához meg kell adni:
Egy teljes egymást kölcsönösen kizáró eseményrendszert.

K Kovács AIDS-es
 \bar{K} Kovács nem AIDS-es

A likelihoodot az eseménytéren.

$p(+|K, I)$ a teszt +, ha AIDS-es - legyen 98%
 $p(+|\bar{K}, I)$ a teszt +, ha nem AIDS-es - legyen 3%

A prior valószínűséget,

ismeretünket arról, hogy Kovács AIDS-es mielőtt a tesztet kiértékelnénk.

Legyen ez az AIDS-es betegek aránya a teljes lakosság körében.

$$p(K|I) = 1\%$$

Példa II

Mi a valószínűsége, hogy Kovács AIDS-es, ha a teszt eredménye +?
Meg kell határozni a $p(K|+, I)$ poszterior valószínűséget.

Bayes tétel

$$p(K|+, I) = \frac{p(+|K, I)p(K|I)}{p(+|K, I)p(K|I) + p(+|\bar{K}, I)p(\bar{K}|I)}$$

$$p(K|+, I) = \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.98 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.99} = 0.248$$

Példa III

Vegyünk extrém esetet.

A test mindig negatív, ha az egyén nem AIDS-es.

$$p(+|\bar{K}, I) = 0$$

$$p(K|+, I) = \frac{0.98 \cdot 0.01}{0.98 \cdot 0.01 + 0.0 \cdot 0.99} = 1$$

Azaz Kovács biztos, hogy AIDS-es.

Az eredményt megkaphatjuk a Boole algebra felhasználásával is.

I információ $\rightarrow \bar{K} \Rightarrow -$

$+ \Rightarrow K$

$$p(K|+, I) = 1$$

Példa IV

Vegyünk extrém esetet

A test mindig +, ha az egyén AIDS-es.

$$p(+|K, I) = 1$$

$$p(K|+, I) = \frac{1.00 \cdot 0.01}{1.00 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.99} = 0.252$$

Azaz Kovács nem biztos AIDS-es.

Boole algebra

I információ $\rightarrow K \Rightarrow +$

de nem igaz, hogy $+ \Rightarrow K$

Pelda V

Vegyünk extrém esetet

Senki sem AIDS-es

$$p(K|I) = 0$$

$$p(K|+, I) = \frac{0.98 \cdot 0.0}{0.98 \cdot 0.0 + 0.03 \cdot 1.0} = 0$$

A prior bizonyosságát semmilyen mérés nem tudja megváltoztatni.

Példa VI

Kovács másodszori tesztje is + .

A Bayes elméletben most a prior az első teszt poszteriorja.

$$P(K|I) = 0.25$$

$$p(K|+, +, I) = \frac{0.98 \cdot .25}{0.98 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.75} = 0.92$$

Tekintsük a két tesztet mint egy mérést.

A likelihood – a két + teszt valószínűsége

$$p(+ + |K, I) = 0.98^2$$

$$p(+ + |\bar{K}, I) = 0.03^2$$

$$p(K|+, +, I) = \frac{0.98^2 \cdot 0.01}{0.98^2 \cdot 0.01 + 0.03^2 \cdot 0.99} = 0.92$$

A két eredmény megegyezik.

Ez a Cox axiómák egyik eleme.