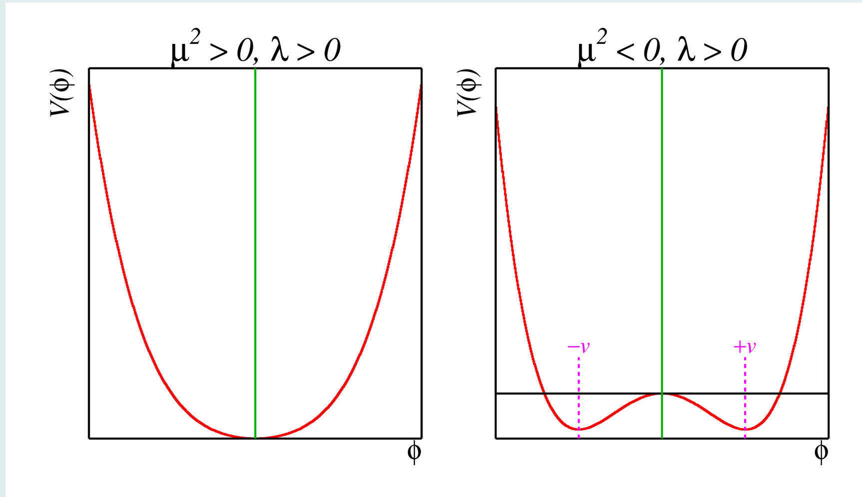
Az Univerzum alapállapotának stabilitása a Higgs-bozon felfedezése tükrében

Patkós András Eötvös Egyetem, Fizikai Intézet

- Stabilitás a klasszikus és a kvantummechanikában
- A potenciál kvantumkorrekciói
- Renormalizáció és stabilitás
- Egyszerű Higgs+top modell vizsgálatának eredményei

  Jakovác A., Kaposvári István, P.A., in: Gribov-85, 2016, pp. 438-450
- **A Higgs-potenciál kvantum korrekciói jelenlegi ismereteink szintjén**
- ”Aszimptotikusan biztonságos” kvantumgravitáció hatása,
  M. Shaposhnikov, C. Wetterich, 2010

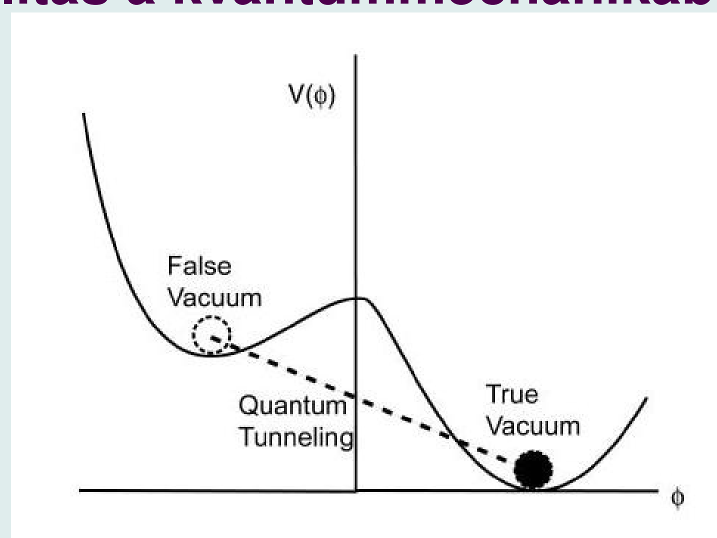
Stabilitás a klasszikus mechanikában



Alapállapot

szimmetrikus $$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4$$ sérült szimmetriájú

Stabilitás és metastabilitás a kvantummechanikában



A potenciál kvantumkorrekciói egy példán

Fermion (ψ) fluktuációk hatása bozon-tér (ϕ) potenciáljára egyszerű Yukawa-elméletben (euklideszi téridőn):

$$L[\phi,\psi,\bar{\psi}] = \bar{\psi}(x)\partial_m\gamma_m\psi(x) + U(\rho) + h\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{1}$$

$$U(\rho) = m^2\rho + \frac{\lambda}{2}\rho^2, \qquad \rho = \frac{\phi^2}{2}. \tag{2}$$

ρ_0 bozon-háttér tömeget generál a fermionnak: $\mathbf{M^2 = 2h^2}\rho_0$

Fermion-ingadozások járuléka a háttér potenciális energiájához:
(Fermi-Dirac statisztika miatt negatív előjelű additív korrekció)

$$U_{eff}(\rho_0) = U(\rho_0) - \frac{1}{2V_d}\ln\frac{\det[-\Box + M^2]}{\det[-\Box]} = U(\rho_0) - 2\int_p \ln\left(1 + \frac{M^2}{p^2}\right) \tag{3}$$

A potenciál kvantumkorrekciói

Izotróp impulzus-levágással az integrál analitikusan elvégezhető:
Λ a maximális (levágási) impulzus

$$U_{eff}(\rho_0) = U(\rho_0) - \frac{M^2\Lambda^2}{16\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2}\left[M^4 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \Lambda^4 \ln\left(1 + \frac{M^2}{\Lambda^2}\right)\right]. \quad (4)$$

A divergens rész leválasztása $\frac{\Lambda^2}{M^2}$ hatványai szerinti sorfejtéssel:

$$U_{eff}(\rho_0) = m^2\rho_0 + \frac{\lambda}{2}\rho_0^2 - \frac{2h^2\rho_0\Lambda^2}{8\pi^2} + \frac{4h^4\rho_0^2}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{4h^4\rho_0^2} + \frac{4h^4\rho_0^2}{32\pi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right). \quad (5)$$

Hogyan lehetne elvégezni a $\Lambda \to \infty$ határátmenetet?

Renormalizáció és stabilitás

Tömeg és önkölcsönhatás újradefiniálása, más szóval *renormalizációja*:

$$m^2 = \mathbf{m_R^2} + \frac{h^2\Lambda^2}{4\pi^2}, \qquad \lambda = \lambda_{\mathbf{R}} - \frac{h^4}{2\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \tag{6}$$

Figyelem! a logaritmus argumentumából M^2-et a μ renormalizációs skála bevezetésével távolítottuk el!

$$U_{eff}(\rho_0,\mu) = \mathbf{m_R^2}\rho_0 + \frac{\lambda_{\mathbf{R}}}{2}\rho_0^2 - \frac{h^4}{16\pi^2}\rho_0^2\ln\frac{2e^{-1/2}h^2\rho_0}{\mu^2}. \tag{7}$$

Azonban, van olyan nagy ρ_0, amelyre a negatív második tag $\sim \rho_0^2$ felülmúlja az elsőt, azaz destabilizálja a potenciált!

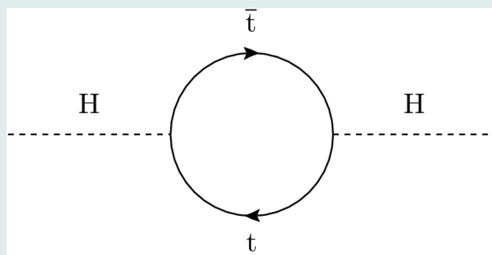
Furcsa, mert a tömeget renormalizálva, de λ-t meghagyva, a potenciál pozitív definit korrekciót kap!

$$U_{eff} = m_R^2\rho_0 + \frac{\lambda}{2}\rho_0^2 + \frac{1}{16\pi^2}\left[M^4\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \Lambda^4\left(\frac{M^2}{\Lambda^2} - \ln\left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)\right)\right]. \tag{8}$$

A ϕ mező tömegnégyzete:

$$m_\phi^2 = \frac{d^2U_{eff}}{d\phi^2}\Big|_{\phi=\phi_0} = 2\rho\frac{d^2U_{eff}}{d\rho^2} + \frac{dU_{eff}}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} = 2\rho_0\frac{d^2U_{eff}}{d\rho_0^2}$$
$$= 2\rho_0\left[\lambda + \frac{h^4}{2\pi^2}\left(\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{M^2}{\Lambda^2}}\right)\right].$$

Levágásfüggő alsó korlát, ami még összefér a stabilitással: $\boldsymbol{\lambda_{\mathbf{min}} = 0}$.



Jelentősége:
Ha ρ_0, h, m_ϕ^2 kísérleti adatokból ismert, akkor

Λ_{max} maximális skála , amelyen az elmélet érvényessége megszűnik:
az új fizika impulzus/energia skálája.

$$\pi^2 \frac{m_\phi^2}{h^4 \rho_0} = \left(\ln \left(1 + \frac{\Lambda_{max}^2}{M^2} \right) - \left(1 + \frac{M^2}{\Lambda_{max}^2} \right)^{-1} \right). \quad (9)$$

A negyedfokú csatolás viselkedése is korlátozza a maximális energiaskátát:

$$\lambda_{eff} = \frac{dm_\phi^2}{2d\rho_0} = \lambda + \frac{h^4}{2\pi^2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) - \frac{1}{1 + \frac{M^2}{\Lambda^2}} - \frac{1}{(1 + \frac{M^2}{\Lambda^2})^2} \right]. \quad (10)$$

Ha $\Lambda >> hv \sim k_{EW}$

$$\lambda_{eff} \approx \lambda + \frac{h^4}{\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{k_{EW}}.$$

A fizikai csatolásnak a k_{EW} skálához tartozó λ_{eff} értéke mérhető (rögzített)

Egyre növelve Λ-t, egyre inkább negatív λ lenne szükséges.

A fermion-fluktuációk hatása negatív (instabil) kezdőértéket követelne, ha tetszőlegesen nagy Λ értékre akarjuk elfogadni a Yukawa-kölcsönhatás érvényességét.

Egzakt renormalizációs egyenlet

Skálafüggő effektív potenciál $U_k(v)$ egy önkölcsönható skalár elméletben:

$$L[\Phi] = \frac{1}{2}(\partial_m \Phi)^2 + U[\Phi] \tag{11}$$

A k skálánál nagyobb energiájú fluktuácók hatását egzaktul figyelembe veszi a rögzített v háttéren.

Fokozatos integrálás a $(t, t+dt),\ \ t = \ln(k/\Lambda)$ tartományba eső módusokra:

$$\begin{aligned} \partial_t U_k[v] &= \frac{1}{2}\int_q \partial_t \mathbf{R_k}(q)[q^2(1+\mathbf{R_k}(q)) + U_k''(v)]^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\int_q \hat{\partial}_t \ln[q^2(1+\mathbf{R_k}(q)) + U_k''(v)] \end{aligned} \tag{12}$$

$\mathbf{R_k}(q)$ regulátor-függvény, amely csak $q \approx k$-ra változik
$\rightarrow$ az integrálba ezek a módusok adnak járulékot
$\rightarrow$ a következő rétegre a módosult hatásból számolt csatolásokkal számolják az integrált (ezért egzakt!).

Egzakt renormalizációs egyenlet

U_k kifejtése Taylor-sorba: $U_k(v) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(k) v^{2l}$

$$\rightarrow \quad \frac{dc_l(k)}{dt} = \beta_l(\{c_j(k)\}, \Lambda)$$

Általánosítás fermion-bozon elméletre:

$$\Gamma_k = \int_x \left[\bar{\psi}\gamma_m \partial_m \psi + \frac{1}{2}(\partial_m \sigma)^2 + h_k \sigma \bar{\psi}\psi + U_k(\rho) \right], \qquad \rho = \frac{1}{2}\sigma^2. \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\partial_k [U_k(\rho_0) + h_k v(\bar{\psi}_0 \psi_0)] \\ &\qquad = \frac{1}{2}\hat{\partial}_k \int_q \Bigg[-4\log(q_R^2 + m_\psi^2) + \log(q_R^2 + m_{B0}^2) \\ &\qquad\qquad + \log\left\{ 1 - h_k^2 \frac{1}{q_R^2 + m_{B0}^2} \frac{2m_\psi(\bar{\psi}_0\psi_0)}{q_R^2 + m_\psi^2} \right\} \Bigg]. \end{aligned} \tag{14}$$

$$m_{B0}^2 = U_k'(\rho) + 2\rho U_k''(\rho), \qquad m_\psi^2 = 2h_k^2 \rho_0. \tag{15}$$

Egyszerűsített potenciál: $U_k(\sigma) = m_k^2 \rho + \frac{\lambda_k}{2}\rho^2$

$$m_\sigma^2 = 2\rho_{min}\frac{d^2 U_{k=0}(\rho_{min})}{d\rho^2} = 2\lambda_{k=0}\rho_{min}, \quad m_\psi = h_{k=0}\sqrt{2\rho_{min}}$$

A renormalizációs csoport egyenlet megoldási eljárása:

1. Válassz λ_Λ, Λ párt!

2. Keresd meg azt az $m^2_{k=\Lambda}, h_{k=\Lambda}$ értékpárt, amellyel a renormalizációs csoport egyenletet $k=\Lambda$-tól $k=0$-ig megoldva

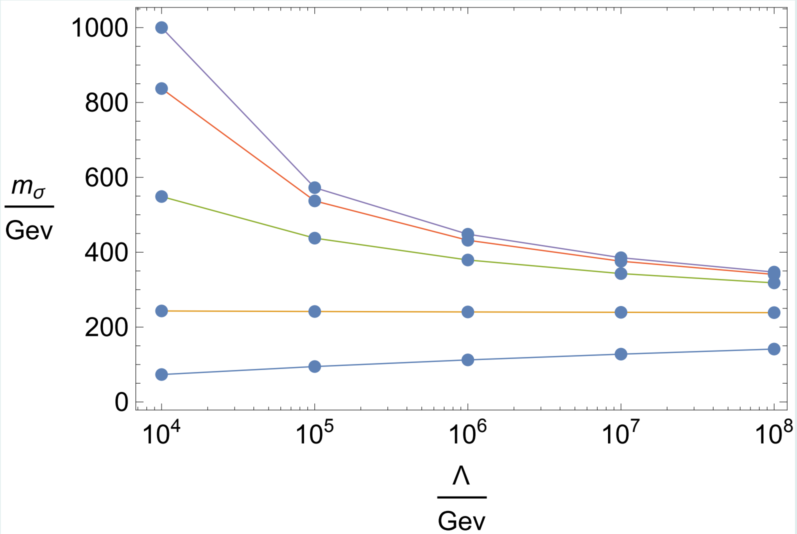
$$m_\psi = 173 \text{ GeV}, \quad \sqrt{2\rho_{min}} = 246 \text{ GeV}$$

3. Olvasd le $\lambda_{k=0}$ értékét és helyettesítsd be m_σ^2 fenti képletébe!

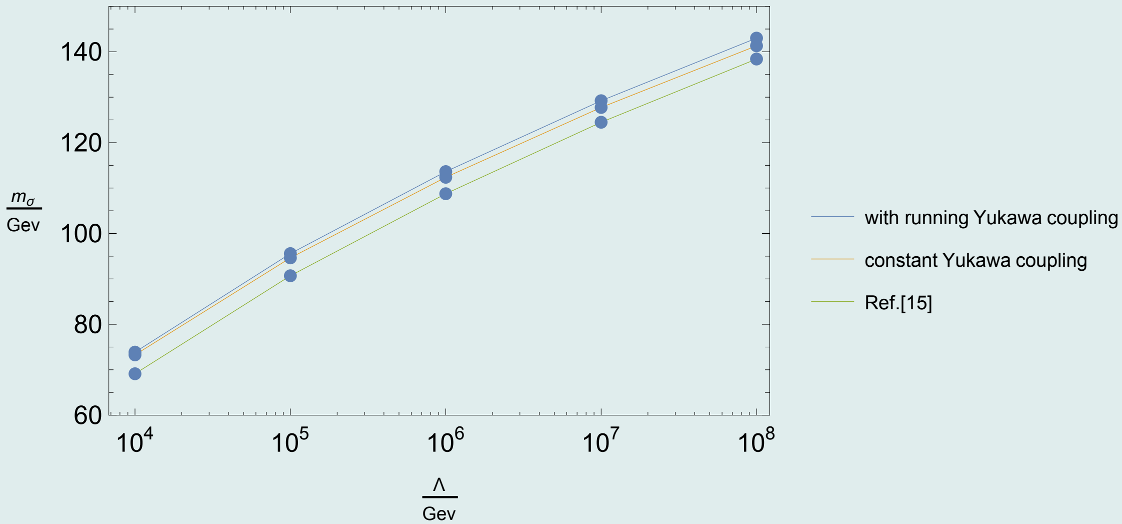
4. $\lambda_{k=\Lambda} \approx 0$ adja az alsó korlátot Λ függvényében

5. $\lambda \geq 100$-tól besűrűsödik felső korláthoz adott Λ-ra

A korlátokat mutató görbesereg (Jakovác-Kaposvári-Patkós)



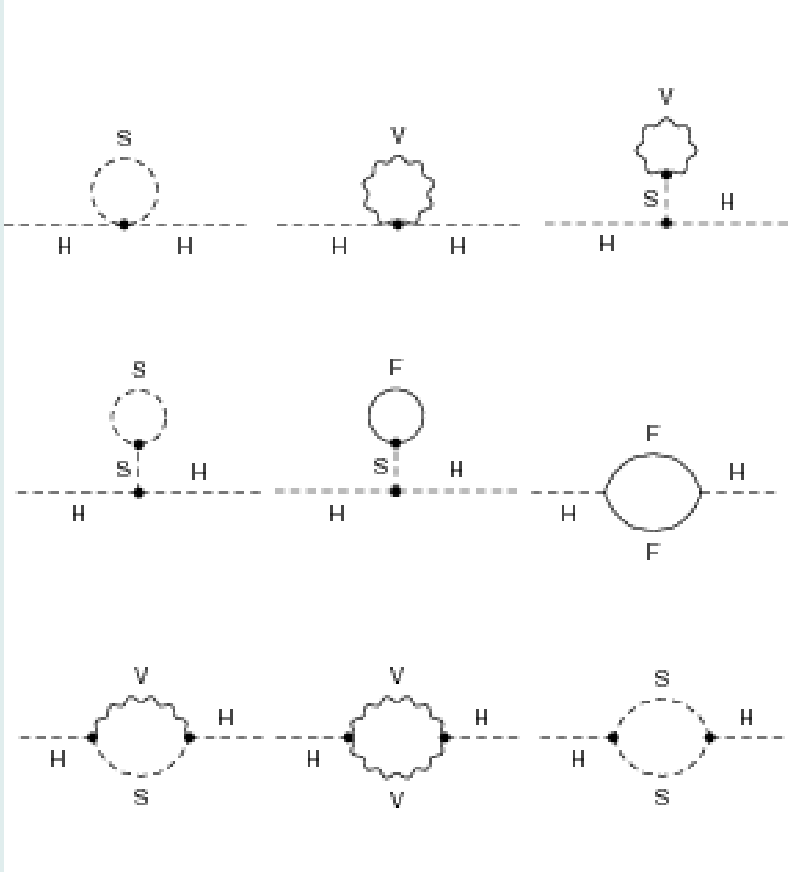
$m_\sigma = 125$ GeV által megengedett maximális Λ leolvasása



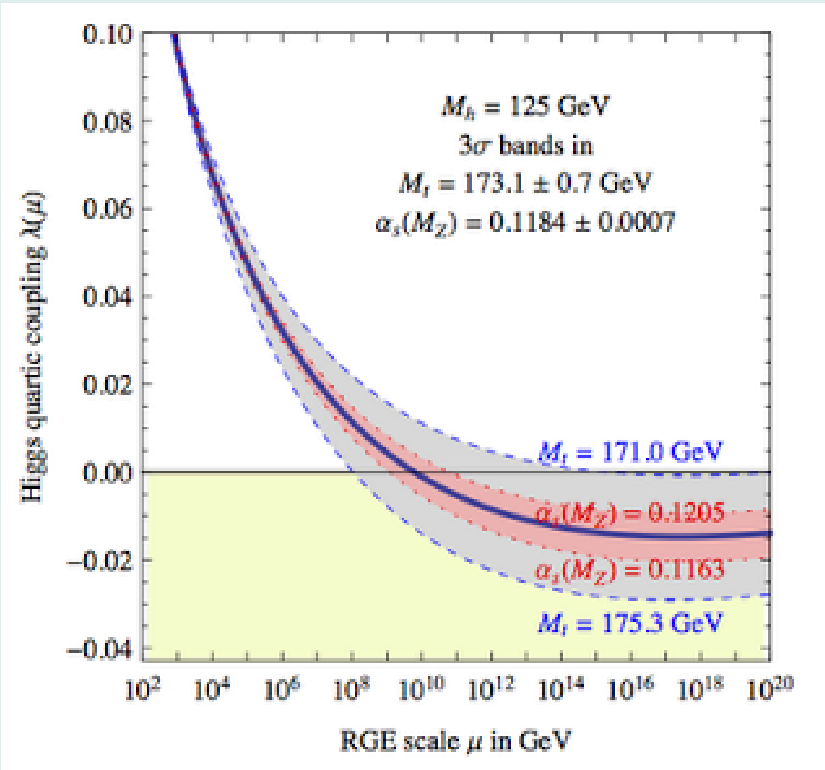
A Higgs-potenciál negyedfokú tagja együtthatójának (λ) futása a Standard Modellben:

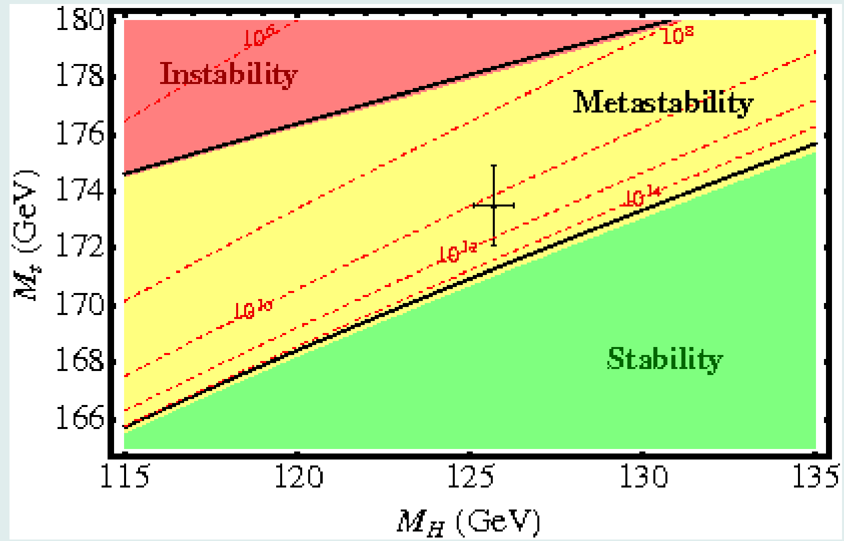
$$\frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{1}{16\pi^2}\left[-6h_{t-H}^4 + 12h_{t-H}^2\lambda + \frac{3}{8}\left(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2\right) - 3\lambda(3g^2 + g'^2) + 24\lambda^2\right] \tag{16}$$

A Standard Modell $SU(2) \times U(1)$ szimmetriacsoportjához a g és a g' mértékcsatolások tartoznak, h_{t-H} a top-kvark és a Higgs-mező csatolása



Érzékenység a top-kvark tömegére, azaz h_{t-H}-ra



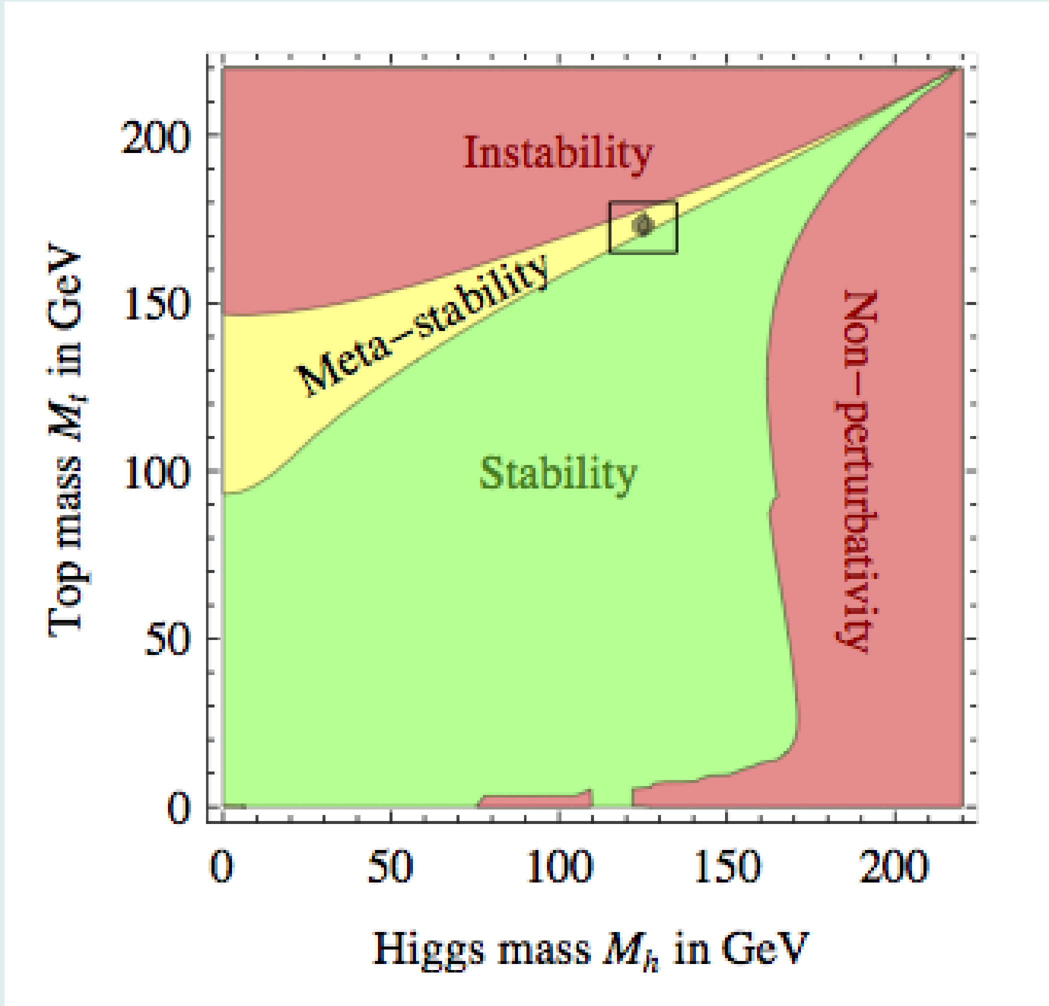


A Higgs-potenciál meta-/instabil lesz $\Lambda = 10^8 - 10^{14}$ GeV között.

Metastabilitás: egy mélyebb potenciál értékhez tartozó minimum, ahová átalagutazhat a Higgs-vákuum

az alagúteffektus becsült rátája: $\sim 10^{-500} - 10^{-1500}$ között változik a top-kvark tömegével

Az összefoglaló helyzetábra (kell-e nem-perturbatív technika?)



Egy elég jól követhető áttekintés:

J.R. Espinosa *Vacuum stability and the Higgs boson*, arXiv:1311.1970

Kvantumgravitációhoz csatolt Standard Modell stabilitása

"Aszimptotikusan biztonságos" kvantumgravitáció hipotézise (Weinberg, 1968)

Graviton-szórás nem-renormalizálható perturbációs sora $G_N k^2$ hatványai szerint halad, ha k a maximális (levágási) impulzus

Feltételezett **ultraibolya biztonságos** skálaviselkedés nagy impulzusra:
$G_N(k^2) \sim (M^2_{Planck} + 2\xi_0 k^2)^{-1}$, ha $k \to \infty$, akkor $G_N(k^2)k^2 \to \mathrm{konst.}$

Skálaváltás impulzusa: $k_{tr} = \frac{M_{Planck}}{\sqrt{2\xi_0}} > M_{Planck}$,

FRG-vizsgálat UV FP-t talált: $\xi_0 \approx 0.024$.

Shaposhnikov-Wetterich feltevése: nincs új fizika $k > k_{Fermi}$ tartományban

Az $x_i = (\lambda, h, g_1, g_2, g_3)$ SM-csatolásokat szabályozó béta-függvények:

$$\beta_{\mathbf{x_i}} = \beta^{\mathbf{GR}}_{\mathbf{x_i}} + \beta^{\mathbf{SM}}_{\mathbf{x_i}}, \qquad \beta^{\mathbf{GR}}_{\mathbf{x_i}} = \mathbf{A_i x_i} \tag{17}$$

A_i gravitációval indukált anomális dimenzió.

Az összes mértékcsatolás (g_1 is!) aszimptotikusan szabad: $A_{g_i} < 0$.

$k >> k_{tr}$ tartományban nem befolyásolják h, λ skála-viselkedését:

$$\beta_h \approx A_h h + \frac{9}{32\pi^2} h^3, \qquad \beta_\lambda \approx A_\lambda \lambda + \frac{3}{8\pi^2}(4\lambda^2 + 2\lambda h^2 - h^4) \tag{18}$$

Egyetlen konzisztens eset: $A_\lambda > 0, \quad A_h < 0$

Yukawa-csatolásra (h) két FP: $h_{UV} = 0, \quad h_{IR} = \sqrt{\frac{32\pi^2 |A_h|}{9}}$

Higgs-öncsatolás (λ) egyetlen FP: $\lambda_{IR} = 0$, ha h elhanyagolhat k_{tr}-ig.

IR felé λ gyorsan nullához közelít.

Ha $k \sim k_{tr}$ tartományban már van $h \neq 0$ (de kicsi), akkor is $\lambda(k_{tr}) \approx 0$.

A Yukawa csatolás hatása lecsökkenti λ saját hatványai által diktált csökkenés ütemét. $-h^4$ hatására a fenti egyenlet λ^* FP-be fut be, azaz $\beta_\lambda(k_{tr}) \approx 0$.

$$\lambda(k_{tr}) \approx 0, \qquad \beta_\lambda(k_{tr}) \approx 0 \tag{19}$$

Konklúzió:

- $k < k_{tr}$ tartományban az IR-továbbfejlődés a stabilitási határon indul és a Standard Modell RG-fejlődését követi
- k_{Fermi}-hez az alsó stabilitási pont közelében lévő $m_{Higgs} = 126 GeV$ értéket JÓSOLTÁK (8 GeV bizonytalansággal)!
- λ skálázó növekedését $k >> k_{tr}$-re a **kölcsönható fix-pont elmélet** határozza meg: nincs Landau-pólus szingularitás
- A Higgs-potenciál a teljes impulzus-tartományban stabil!